LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA	KONTINUERLIGA SYSTEM
DUGGA	FMAN55
MATEMATIK	2023.03.08, 8:00–10:00

Hjälpmedel: formelblad. För att du skall kunna erhålla full poäng skall dina lösningar vara läsbara, läsvärda, samt vara försedda med ordentliga motiveringar. Lämna, om möjligt, tydliga och enkla svar. Varje uppgift kan som mest ge 3 poäng. För att erhålla bonus krävs minst 6 poäng.

1. Ge en möjlig fysikalisk situation där modellen

$$\begin{cases} u_t - a u_{xx} = R, & 0 < x < \ell,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, & t > 0, \\ -\lambda u_x(\ell,t) = \alpha u(\ell,t), & t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & 0 < x < \ell, \end{cases}$$

kan användas. Här är a, R, ℓ, λ och α positiva konstanter, och f en given funktion på intervallet $[0,\ell]$. Förklara specifikt vad samtliga konstanter och f står för.

2. Lös problemet i föregående uppgift, i det fallet då $a = 1$, $R = 1$, $\ell = \pi$, $\lambda = 1$, $\alpha = 0$, och där $f(x) = 0$ för $0 \le x \le \ell$.

3. Bestäm de reella konstanterna a, b och c som gör att integralen

$$\int_{-1}^{1} |x^4 - a - bx - cx^2|^2 \, dx$$

minimeras.

4. Är operatorn

$$D(T) = \{u \in C^2([0,1]) \mid u'(0) = 0,\ u'(1) = u(1)\},$$
$$Tu = -u'',$$

symmetrisk i $L_2([0,1])$? Hur många negativa egenvärden har T?